Glava 1

Matrice

1.1 Definicija. Operacije nad matricama.

Definicija 1.1. *Matricom nad poljem $\mathbb{P}$ naziva se tablica $m \times n$ elemenata iz polja $\mathbb{P}$.*

Oznaka: $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ označava da matrica A nad poljem $\mathbb{P}$ sadrži m vrsta i n kolona.
Matricu $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ koja sadrži isti broj vrsta i kolona ćemo nazivati kvadratnom. U suprotnom, matricu ćemo nazivati pravougaonom.
Uvedimo sada tri osnovne operacije nad matricama.
1. Množenje matrice brojem
Neka je $\alpha \in \mathbb{P}$, $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$. Matricu A možemo pomnožiti brojem α:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Sabiranje matrica istih dimenzija
Neka su A i B matrice istih dimenzija, $A, B \in \mathbb{P}^{m\times n}$. Tada možemo sabrati ove dvije matrice na sljedeći način:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica $A + B$ takođe pripada $\mathbb{P}^{m\times n}$.
Naglasimo da, ukoliko matrice nemaju iste dimenzije, operacija sabiranja se ne može uvesti.
3. Množenje dvije matrice
Nešto složenija je operacija množenja matrica. Proizvod $A \cdot B$ je definisan samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B. Dakle, neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{m\times n}$ i $B = (b_{ij}) \in$

$\mathbb{P}^{n\times k}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Tada je proizvod $A \cdot B \in P^{m\times k}$ matrica definisana na sljedeći način:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ik} \end{pmatrix}.$$

Znak $\sum_{i=1}^{n}$ označava sumu n elemenata. Na primjer, $\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1n}b_{n1}$.
Između ostalog, razmotrimo množenje vektora matricom. Neka je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}, b \in \mathbb{P}^{n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$Ab = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_i \end{pmatrix}.$$

Vidimo da $Ab \in \mathbb{P}^{m}$.
Još jednom naglasimo da je proizvod $C \cdot D$ matrica $C \in \mathbb{P}^{p\times q}$ i $D \in \mathbb{P}^{r\times s}$ definisan samo u slučaju kada $q = r$.
Primjer 1. Neka su date matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ i $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & -5 & 1 & -1 \\ -5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tada je lako naći proizvod $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 37 & 49 \\ -9 & -19 \\ -21 & -22 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da u ovom slučaju nije definisan proizvod $B \cdot A$.
Zadatak 1. Da li je skup $\mathbb{R}^{n\times n}$ svih realnih kvadratnih matrica dimenzije n sa operacijom množenja grupa?
Zadatak 2. Pokazati da operacija množenja na skupu kvadratnih matrica nije komutativna. Za ovo je potrebno navesti primjer dvije kvadratne matrice A i B, takve da $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.2 Sistem linearnih jednačina. Metod Gausa.

U ovoj sekciji ćemo kratko razmotriti jedan metod rješavanja sistema m linearnih jednačina sa n nepoznatih. Detaljnije ćemo se ovim zadatkom baviti u sljedećem Poglavlju.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

Matricom ovog sistema nazovimo sljedeću matricu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ nazovimo vektorom desne strane, a vektor $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorom nepoznatih promjenljivih.

Znajući operaciju množenja matrica i, između ostalog, množenja vektora matricom, sada zadatak (1.1) možemo zapisati kraće, u vektorskom obliku na sljedeći način:

$$AX = b. \tag{1.2}$$

1.2.1 Metod Gausa

Posmatrajmo proširenu matricu sistema (1.1) $(A|b)$:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Pretpostavimo da je $a_{11} \neq 0$. Prvu vrstu pomnoženu sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, ..., -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ dodajemo respektivno drugoj, trećoj, ..., $m-$toj vrsti, dobijamo:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \widetilde{a_{m2}} & \dots & \widetilde{a_{mn}} & \widetilde{b_m} \end{array}\right).$$

Pod pretpostavkom da je $\widetilde{a_{22}} \neq 0$, ponavljamo postupak sve dok ne dobijemo tzv. stepenasti oblik matrice (u svakoj novoj vrsti ispred prvog nenultog elementa postoji jedna bar jedna nula više nego u prethodnoj vrsti), tj.:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\widetilde{a_{2n}}} & \widetilde{\widetilde{b_2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\widetilde{\widetilde{a_{mn}}}} & \widetilde{\widetilde{\widetilde{b_m}}} \end{array}\right).$$

U slučaju da se u nekom momentu dogodi da $\widetilde{a_{ii}} = 0$, to ćemo vrstu i zamijeniti sa nekom od donjih vrsta $j > i$, takvom da $\widetilde{a_{ji}} \neq 0$. Ukoliko se dogodi situacija da svi $a_{ji} = 0$, $j \geq i$, to prelazimo na sljedeću kolonu. Na ovaj način uvijek svodimo matricu na stepenasti oblik, što se jasno vidi iz narednih primjera.

Primjer 1. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-\frac{1}{2}) + IIv; Iv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to IIv \cdot (-6) + IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -19 & -8 \end{array}\right).$$

Odavde nalazimo da je $-19x_3 = -8$, tj. $x_3 = \frac{8}{19}$. Uvrstimo ovo u drugu jednačinu i dobijamo $\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}\frac{8}{19} = \frac{3}{2}$ odakle imamo $x_2 = \frac{17}{19}$. Iz prve jednačine $2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3$ zamjenom konkretnih vrijednosti za x_2 i x_3 dobijamo da je $x_1 = -\frac{32}{19}$. Na ovaj način smo našli rješenje sistema linearnih jednačina koristeći metod Gausa.

Primjer 2. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-\frac{3}{2}) + IIv; Iv \cdot (-\frac{1}{2}) + IIIv; Iv \cdot (-2) + IVv \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -10 \end{array}\right) \to IIIv\cdot(-2)+IVv; IIv \leftrightarrow IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Na osnovu posljednje matrice zaključujemo da sistem nema rješenje.

Primjer 3. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Zamijenićemo mjesta prve i druge vrste, a onda prvu vrstu pomnoženu sa -3 dodajemo drugoj, pa zatim pomnoženu sa -4 trećoj, dobijamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \end{array}\right) \to IIv\cdot(-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odavde zaključujemo da je $-3x_2 - 7x_3 = 4$, tj. $x_2 = -\frac{7}{3}x_3 - \frac{4}{3}$, a iz prve jednačine imamo $x_1 + 2x_3 = -1$, tj $x_1 = -1 - 2x_3$. Opšte rješenje sistema je

$$\begin{pmatrix} -1 - 2x_3 \\ -\frac{7}{3}x_3 - \frac{4}{3} \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Zaključak. Metod Gausa je algoritam rješavanja sistema linearnih jednačina, putem svođenja matrice na stepenasti oblik. Pri tome se koriste tri operacije nad vrstama matrice:
1. množenje jedne vrste brojem $\lambda \neq 0$;
2. zamjena dvije vrste mjestima;
3. dodavanje jedne vrste, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.

Ove tri operacije nad vrstama nazivamo *elementarnim transformacijama vrsta.*
Osim elementarnih transformacija vrsta, mogu se razmotriti i elementarne transformacije kolona matrice. Koristeći elementarne transformacije i vrsta i kolona, matrica se može svesti na još prostiji oblik.

Tvrđenje 1.1. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$. Elementarnim transformacijama vrsta i kolona matrica A*

se može svesti na sljedeći oblik:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdje je G matrica dimenzija $m \times n$, na čijoj glavnoj dijagonali stoji $r \leq m$ jedinica i $m - r$ nula, a svi ostali elementi su jednaki nuli.

Umjesto strogog dokaza, ovdje ćemo navesti primjer koji ilustruje postupak svođenja.
Primjer.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to Iv \cdot (-\frac{3}{2}) + IIv; Iv \cdot 2 + IIIv \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to Ik \cdot (-1) + IIk; Ik \cdot \frac{3}{2} + IIIk; Ik \cdot (-\frac{1}{2}) + IVk \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to IIv \cdot 2 + IIIv; IIk \leftrightarrow IIIk \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to IIk \cdot \frac{3}{7} + IVk \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to Ik \cdot \frac{1}{2}; IIk \cdot \frac{2}{7} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Determinanta kvadratne matrice

Na početku se podsjetimo pojma permutacije konačnog skupa. Skup K' se naziva permutacijom konačnog skupa $K = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ako je K' dobijen iz K zamjenom elemenata mjestima. Prostom permutacijom se naziva skup u kome su samo dva elementa zamijenila mjesta. Skup od n elemenata ukupno ima $n!$ permutacija.
Skup K' se naziva parnom permutacijom skupa K, ako se on može dobiti putem parnog broja prostih permutacija elemenata iz skupa K. U suprotnom, skup se naziva neparnom permutacijom, ako nam treba neparan broj takvih permutacija.
Sada uvedimo pojam determinante kvadratne matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Izaberimo n elemenata matrice A, tako da bude tačno po jedan iz svake vrste i kolone i formirajmo prozivod oblika: $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$, gdje je $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Na ovaj način možemo formirati $n!$ različitih proizvoda. Dalje, saberimo svih $n!$ proizvoda, pri čemu ćemo svaki proizvod uzeti sa odgovarajućim znakom. Pravilo određivanja znaka svakog od proizvoda

je sljedeće: ukoliko je permutacija $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ parna, taj proizvod će ući sa znakom plus, ukoliko je neparna, proizvod će ući sa znakom minus.
Dobijeni zbir od $n!$ sabiraka, uzetih sa odgovarajućim znakovima, se naziva *determinantom* kvadratne matrice $A \in \mathbb{P}^{n \times n}$.

Oznaka: $detA$ ili $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Primjedbe.
1. Determinanta matrice je broj, tj. element polja $\mathbb{P}$.
2. Determinantu imaju samo kvadratne matrice. Nema smisla govoriti o determinanti pravougaone matrice, tj. matrice koja ima različit broj vrsta i kolona.

Primjer 1. Neka je $A = (a_{11}) \in \mathbb{P}^{1\times 1}$ matrica dimenzija 1×1. Tada $detA = a_{11}$.
Primjer 2. Neka je $A \in \mathbb{P}^{2\times 2}$. Tada, saglasno definiciji:

$$detA = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Primjer 3. Neka je $A = \mathbb{P}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in \text{Skup}\, permutacija\{1,2,3\}} sgn(\pi) a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

U ovom slučaju determinanta matrice će biti jednaka zbiru $3! = 6$ proizvoda. Označimo sa $\pi_1, \ldots, \pi_6$ sve permutacije skupa $\{1, 2, 3\}$, sa $P(\pi_j)$ broj inverzija u permutaciji π_j. Znak (parnost) permutacije π_j je $(-1)^{P(\pi_j)}$.

$$\begin{aligned}
\pi_1 &: 1 \quad 2 \quad 3 \quad P(\pi_1) = 0 \Rightarrow sgn\pi_1 = (-1)^0 = 1 \\
\pi_2 &: 1 \quad 3 \quad 2 \quad P(\pi_2) = 1 \Rightarrow sgn\pi_2 = (-1)^1 = -1 \\
\pi_3 &: 2 \quad 1 \quad 3 \quad P(\pi_3) = 1 \Rightarrow sgn\pi_3 = (-1)^1 = -1 \\
\pi_4 &: 2 \quad 3 \quad 1 \quad P(\pi_4) = 2 \Rightarrow sgn\pi_4 = (-1)^2 = 1 \\
\pi_5 &: 3 \quad 1 \quad 2 \quad P(\pi_5) = 2 \Rightarrow sgn\pi_5 = (-1)^2 = 1 \\
\pi_6 &: 3 \quad 2 \quad 1 \quad P(\pi_6) = 3 \Rightarrow sgn\pi_6 = (-1)^3 = -1
\end{aligned}$$

Konačno, imamo:

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Zadatak. Odredimo determinantu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinanta ove matrice se dobija sabiranjem $3! = 6$ proizvoda. Računajući parnost svake od permutacija, dobijamo:

$$detA = 1\cdot 2\cdot 3 + 0\cdot(-1)\cdot(-1) + 7\cdot 0\cdot(-1) - (-1)\cdot 2\cdot 7 - 0\cdot 0\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = 19.$$

Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Sa $\widetilde{A_{ij}} \in \mathbb{P}^{(n-1)\times(n-1)}$ označimo matricu dobijenu iz A izbacivanjem $i-$te vrste i $j-$te kolone.

Teorema 1.1. *Determinanta kvadratne matrice A se može izračunati razlaganjem po bilo kojoj vrsti, tj. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi:*

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot det\widetilde{A_{ij}}.$$

Definicija 1.2. *Broj $(-1)^{i+j} \cdot det\widetilde{A_{ij}}$ naziva se algebarskom dopunom elementa a_{ij}.*

Nastavak zadatka. Odredimo determinantu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

razvijajući je po drugoj vrsti:

$$detA = -0\cdot det\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - (-1)\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -0\cdot 7 + 2\cdot 10 + 1\cdot(-1) = 19.$$

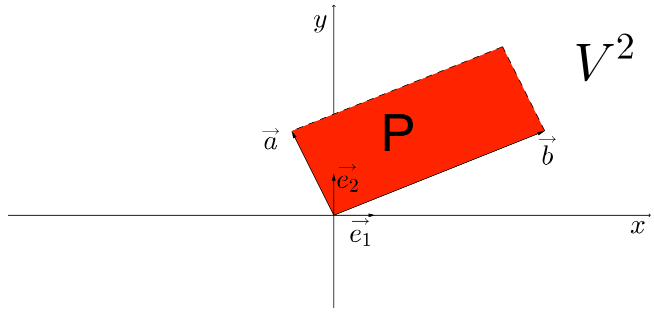
1.3.1 Geometrijski smisao determinante

(A) Razmotrimo dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u geometrijskom prostoru V^2. Izaberimo standardnu bazu $\{e_1, e_2\}$ u V^2. Tada se $\vec{a}$ i $\vec{b}$ razlažu po bazi: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$.
Označimo sa P površinu paralelograma koji je navučen na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada:

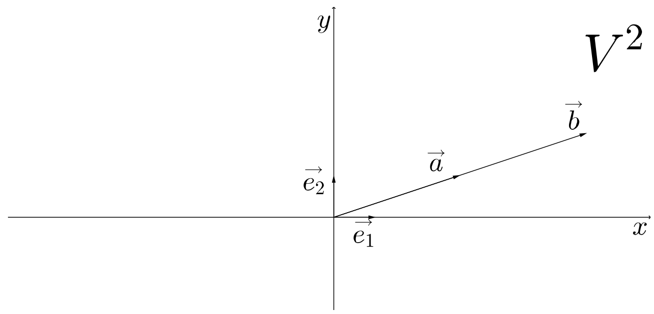
$$P = |det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}|.$$

Dakle, kako bi se izračunala površina paraleleograma koji je navučen na dva vektora, dovoljno je koordinate tih vektora uvrstiti u vrste matrice i izračunati determinantu dobijene matrice dimenzija 2×2. Istina, determinanta matrice može biti negativnom, zato će površina biti apsolutna vrijednost determinante.
Primijetimo da površina zavisi od izbora baze. Kada se govori o površini obično se podrazumijeva da je izabrana standardna baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, ako nije naglašeno drugačije.
Zadatak 1. Izračunati površinu paralelograma navučenog na vektore $\vec{a} = (-1, 2)$ i $\vec{b} = (5, 2)$.
Imamo:

$$P = |det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}| = |-2-10| = 12.$$



Slika 1.1

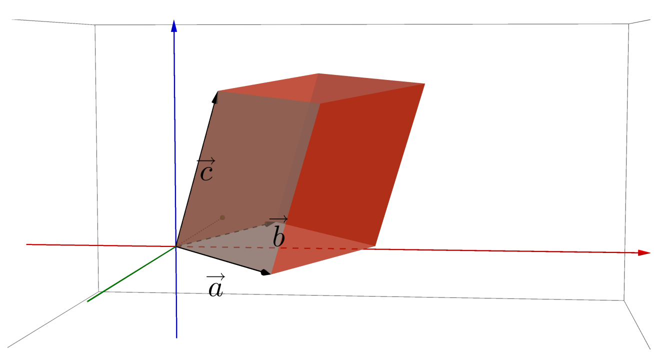


Slika 1.2

Zadatak 2. Izračunati površinu paralelograma navučenog na vektore $\vec{a} = (3,\, 1)$ i $\vec{b} = (6,\, 2)$. Lako je provjeriti da je tražena površina nula. Ovo je bilo očekivano, s obzirom da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. (B) U geometrijskom trodimenzionalnom prostoru V^3 paralelopiped je geometrijsko tijelo navučeno na tri vektora: $\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$, $\vec{c} = (c_1,\, c_2,\, c_3)$. Uvrstivši koordinate ovih vektora u vrste matrice, možemo izračunati zapreminu V ovog paralelopipeda:

$$V = |det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} |.$$

Na Slici 2.3 je prikazan paralelogram navučen na vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$.



Slika 1.3

Zadatak 3. Izračunati zapreminu paralelopipeda navučenog na vektore $\vec{a} = (3,\, 0,\, -6)$, $\vec{b} =$

$(1, -3, -2)$, $\vec{c} = (1, 6, -2)$.
Uvrstimo koordinate vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u vrste matrice i nađimo determinantu:

$$V = |det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}| = 0.$$

Dobijeni rezultat je očekivan, ako uočimo da su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni (linearno zavisni). Pošto leže u istoj ravni, paralelopiped koji je navučen na njih je, u stvari, paralelogram i zapremina mu je nula.
(C) Iako se naša geometrijska intuicija završava na trodimenzionalnom geometrijskom prostoru, moguće je razmotriti zapreminu apstraktnog paralelopipeda u geometrijskom prostoru V^n. Ovaj paralelopiped je navučen na n vektora: $\vec{a}_1 = (a_{11}, \ldots a_{1n}), \ldots, \vec{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$. Očekivano, zapremina ovog apstraktnog n-dimenzionalnog paralelopipeda se može izračunati pomoću determinante:

$$V = |det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}|.$$

Sada već možemo pogoditi da će ova zapremina biti jednaka nuli, ako su vektori-vrste $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linearno zavisni.

1.3.2 Svojstva determinante

Nakon ovih geometrijskih ilustracija pojma determinante, vratimo se algebarskim razmatranjima. Najprije ćemo dokazati dva jednostavna tvrđenja o determinanti matrice.

Tvrđenje 1.2. *Ako matrica A sadrži vrstu koja se sastoji isključivo od nula, tada je $detA = 0$.*

Tvrđenje 1.3. *Neka je matrica B dobijena iz A množenjem jedne vrste brojem λ. Tada je $detB = \lambda \cdot detA$.*

Dva prethodna tvrđenja direktno slijede iz definicije determinante.

Tvrđenje 1.4. *Ako matrica A sadrži dvije identične vrste, tada je $detA = 0$.*

Dokaz
Dokaz ćemo izvesti indukcijom po dimenziji matrice.
Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{2\times 2}$ matrica sa dvije iste vrste. Tada je

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = 0$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za matricu dimenzije $(n-1) \times (n-1)$. Pretpostavimo da je $n \geq 3$ i da je A matrica dimenzije $n \times n$, koja ima dvije iste vrste. Pošto A sadrži $n \geq 3$ vrste, to možemo izabrati neku vrstu i koja nije jedna od dvije iste vrste. Razložimo determinantu matrice A po toj vrsti i:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\widetilde{A_{ij}}. \tag{1.3}$$

Pošto A sadrži dvije iste vrste, to sve matrice $\widetilde{A_{ij}}$ dimenzije $(n-1) \times (n-1)$ sadrže dvije iste vrste. Odavde po pretpostavci indukcije slijedi da $det\widetilde{A_{ij}} = 0$. Tada je (1.3) suma od n sabiraka od kojih je svaki jednak nuli, pa je jasno da je $detA = 0$.
U daljem tekstu ćemo zbog jednostavnosti sa a_i $(i = \{1, \ldots, n\})$, označavati $i-$tu vrstu matrice A: $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$.

Teorema 1.2. *Determinanta matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$ je linearna funkcija svake vrste, tj. za svako $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i svako $\alpha \in \mathbb{P}$ imamo:*

$$det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ u + \alpha v \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ u \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha \cdot det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ v \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dokaz
Dokaz Teoreme izvodimo indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrđenje je očigledno. Pretpostavimo da Teorema važi za matricu dimenzije $(n-1) \times (n-1)$. Neka je A matrica dimenzije $n \times n$ sa vrstama $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Neka za neko $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ imamo da je $a_r = b_r + \alpha \cdot c_r$, gdje su b_r i c_r vektori $b_r = (b_{r1}, b_{r2}, \ldots, b_{rn})$ i $c_r = (c_{r1}, c_{r2}, \ldots, c_{rn})$. Označimo sa B i C matrice dobijene iz A tako što je vrsta a_r zamijenjena vrstom b_r i c_r respektivno. Treba dokazati da je:

$$detA = detB + \alpha \cdot detC.$$

Pretpostavimo da je $r > 1$. Tada su matrice $\widetilde{A_{1j}}, \widetilde{B_{1j}}$ i $\widetilde{C_{1j}}$ iste osim $(r-1)-$ve vrste. Vrsta $(r-1)$ matrice $\widetilde{A_{1j}}$ je oblika $(b_{r1} + \alpha \cdot c_{r1}, \ldots, b_{r,j-1} + \alpha \cdot c_{r,j-1}, b_{r,j+1} + \alpha \cdot c_{r,j+1}, \ldots, b_{rn} + \alpha \cdot c_{rn})$. Jasno je da je ovo suma $(r-1)-$ve vrste matrice $\widetilde{B_{1j}}$ i $(r-1)-$ve vrste matrice $\widetilde{C_{1j}}$, pomnožene sa α. Dimenzije matrica $\widetilde{A_{1j}}, \widetilde{B_{1j}}$ i $\widetilde{C_{1j}}$ su $(n-1) \times (n-1)$, pa za njih važi pretpostavka indukcije, tj.

$$det\widetilde{A_{1j}} = det\widetilde{B_{1j}} + \alpha \cdot det\widetilde{C_{1j}}.$$

Primjetimo da $(r-1)$-va vrsta nije jedina vrsta u matrici A, tj. u njoj postoji još neka vrsta. Ne umanjuju ' ci opštost, možemo pretpostaviti da $r > 2$, tj. da $(r-1)$-va vrsta nije prva vrsta. Razlažući determinantu A po prvoj vrsti dobijamo traženo tvrđenje:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot det\widetilde{A_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot det\widetilde{B_{1j}} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot det\widetilde{C_{1j}} =$$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} \cdot b_{1j} \cdot det\widetilde{B_{1j}} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} \cdot c_{1j} \cdot det\widetilde{C_{1j}} = detB + \alpha \cdot detC.$$

Gore smo koristili jednakost $a_{1j} = b_{1j} = c_{1j}$, koja slijedi iz toga da se matrice $\widetilde{A_{1j}}, \widetilde{B_{1j}}$ i $\widetilde{C_{1j}}$ razlikuju samo po vrsti $(r-1)$, a elementi a_{1j}, b_{1j} i c_{1j} nisu u toj vrsti.

Posljedica 1.1. *Neka je matrica B dobijena zamjenom mjestima dvije vrste u matrici A. Tada je $detA = -detB$.*

Dokaz

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrste u matrici A i neka se B dobija zamjenom mjesta vrsta a_r i a_s, tj.:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo matricu C dobijenu iz A zamjenom vrsta a_r i a_s vrstom $a_r + a_s$:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Determinanta matrice C je 0, jer ima dvije iste vrste, dakle:

$$0 = detC = det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 + detA + detB + 0.$$

Odavde imamo da je $detA + detB = 0$, tj. $detA = -detB$, što je i trebalo dokazati.

Posljedica 1.2. *Neka je matrica B dobijena dodavanjem jedne vrste matrice A, pomnožene brojem α, drugoj vrsti matrice A. Tada je $detA = detB$.*

Dokaz
Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrste u matrici A i neka se B dobija dodavanjem vrste a_r, pomnožene sa α, vrsti a_s u A, tj.:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s + \alpha a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$detB = det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s + \alpha a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha \cdot det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = detA + \alpha \cdot 0 = detA.$$

Posljedica 1.3. *Neka se u matrici A jedna vrsta može izraziti kao linearna kombinacija ostalih. Tada je $detA = 0$.*

Dokaz
Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrste u matrici A. Neka je vrsta a_r linearna kombinacija ostalih, tj. $a_r = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} + \alpha_{r+1} a_{r+1} + \cdots + \alpha_n a_n$. Formirajmo matricu B na sljedeći način: vrsti a_r dodajmo vrstu a_1 pomnoženu sa $-\alpha_1$, vrstu a_2 pomnoženu sa $-\alpha_2$,...,vrstu a_{r-1} pomnoženu

sa $-\alpha_{r-1}$, vrstu a_{r+1} pomnoženu sa $-\alpha_{r+1}$,..., vrstu a_n pomnoženu sa $-\alpha_n$. Determinante matrica A i B su jednake po Posljedici 1.2 Imamo:

$$detA = detB = det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a_r - \alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_{r-1} a_{r-1} - \alpha_{r+1} a_{r+1} - \cdots - \alpha_n a_n \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

jer u B imamo vrstu u kojoj su sve nule.
Zaključak. Ukoliko su vrste matrice A linearno zavisne tada je $detA = 0$.
Primjer. Posmatrajmo matricu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & -18 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vrste ove matrice su $a_1 = (1 \quad 3 \quad 3), a_2 = (0 \quad 7 \quad 2)$ i $a_3 = (1 \quad -18 \quad -3)$. Primijetimo da je $a_3 = a_1 - 3a_2$, što znači da je $detA = 0$.

1.4 Matrice elementarnih transformacija

Neka je zadata matrica $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

U ovoj sekciji ćemo se baviti transformacijama vrsta matrice A. Razlikovaćemo elementarne transformacije vrsta tri tipa:
1. tip: množenje jedne vrste matrice A brojem $\lambda \neq 0$;
2. tip: zamjena dvije vrste matrice A mjestima;
3. tip: dodavanje jedne vrste matrice A, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.
Primjedba. Metod Gausa, svođenje matrice na stepenasti oblik, se sastoji od konačnog broja elementarnih transformacija vrsta matrice A.
Sada ćemo pokazati da se elementarne transformacije vrsta mogu dobiti množenjem matrice A nekim kvadratnim matricama. Te matrice ćemo nazivati *matricama elementarnih transformacija*.
1. tip: Matrica elementarne transformacije množenja vrste brojem $\lambda \neq 0$.

Označimo sa E_a kvadratnu dijagonalnu matricu dimenzije m, na čijoj dijagonali su sve jedinice, osim r-te vrste, gdje se nalazi broj λ:

$$E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ matricom $E_a \in \mathbb{P}^{m\times m}$ sa lijeve strane:

$$E_aA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{r1} & \lambda a_{r2} & \dots & \lambda a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod ove dvije matrice matrica dobijena iz A množenjem r-te vrste brojem λ. Konačno, primijetimo da je $detE_a = \lambda \neq 0$.

2. tip: Matrica elementarne transformacije zamjene dvije vrste mjestima.

Označimo sa E_b kvadratnu matricu dimenzije m u kojoj u svakoj vrsti stoji tačno po jedna jedinica. Pri tome u svim vrstama, osim r-te i s-te, jedinice stoje na dijagonali, dok u vrsti r jedinica stoji u s-toj koloni, a u vrsti s u r-toj koloni:

$$E_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu A matricom E_b sa lijeve strane:

$$E_bA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod E_bA matrica dobijena iz A zamjenom vrsta r i s mjestima.
Primijetimo da $det E_b = -1$.
3. tip: Dodavanje jedne vrste, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.
Označimo sa E_c kvadratnu matricu dimenzije m u kojoj na dijagonali stoje sve jedinice, ostalo su nule, osim elementa na poziciji r, s, koji je jednak α:

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu A matricom E_c sa lijeve strane:

$$E_cA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} + \alpha a_{r1} & a_{s2} + \alpha a_{r2} & \dots & a_{sn} + \alpha a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod E_cA matrica dobijena iz A dodavanjem vrste r, pomnožene brojem α, vrsti s.
Primijetimo da $det E_c = 1$.
Primjer. Neka je data matrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Pretpostavimo da je u matrici A potrebno prvoj vrsti dodati drugu, pomnoženu brojem 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Formirajmo matricu E_c elementarnih transormacija trećeg tipa:

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultat proizvoda E_cA je upravo matricu koju smo tražili.

$$E_cA = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 & 4 \\ 6 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zaključak. Prilikom rješavanja sistema linearnih jednačina smo koristili metod Gausa. Sada vidimo da se metod Gausa svođenja matrice $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ na stepenasti oblik može zapisati kao množenje matrice A matricama elementarnih transformacija sa lijeve strane.
Primjedba. Množenje matrice A matricama elementarnih transformacija sa desne strane odgovara elementarnim transformacijama kolona.
Zadatak. Zadata je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 4 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & -11 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zapisati matrice elementarnih transformacija $E_1, \ldots, E_m$ kojima je potrebno pomnožiti A s lijeve strane kako bi se ova svela na stepenasti oblik.

1.5 Obratna matrica

U ovoj Sekciji ćemo nastaviti da se bavimo isključivo kvadratnim matricama iz $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Definicija 1.3. *Matrica* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ *dimenzija $n \times n$, na čijoj dijagonali se nalaze jedinice, a izvan dijagonale nule, se naziva jediničnom matricom.*

Definicija 1.4. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Ako postoji matrica $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da je $Q\cdot A = A\cdot Q = I$, tada ćemo Q nazivati obratnom (ili inverznom) matricom matrice A.*
Matricu koja ima obratnu ćemo nazivati invertibilnom.

Oznaka: Obratna matrica se označava $Q = A^{-1}$.

Teorema 1.3. *Matrice elementarnih transformacija su invertibilne i njihove obratne matrice su matrice elementarnih transformacija istog tipa.*

Dokaz
Dokaz ćemo izvesti tako što ćemo za svaki od tri tipa matrica elementarnih transformacija neposredno naći njihove obratne matrice.
1. Razmotrimo najprije matricu E_a elementarnih transformacija prvog tipa.

$$E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada:

$$E_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\lambda} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Neka je E_b matrica elementarnih transformacija drugog tipa, tj. zamjene dvije vrste mjestima. Tada je lako provjeriti da $E_b = E_b^{-1}$.
3. Konačno, razmotrimo matricu elementarnih transformacija trećeg tipa.

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, E_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Na ovaj način je pokazano da su matrice elementarnih transformacija invertibilne. Vidimo da su obratne matrice $E_a^{-1}, E_b^{-1}, E_c^{-1}$ takođe matrice elementarnih transformacija.

1.6 Rang matrice

Neka je zadata pravougaona matrica $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Naglasimo da, kao i ranije, vrste matrice A označavamo sa $a_1, \ldots, a_m$.
Iz A izaberimo k vrsta i k kolona, tj. podmatricu M_k dimeznije $k \times k$. Označimo sa $i_1, i_2, \ldots, i_k$ indekse izabranih vrsta, a sa $j_1, j_2, \ldots, j_k$ indekse kolona.

$$M_k = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}.$$

Definicija 1.5. *Determinanta matrice M_k naziva se minorom reda k matrice A.*

Definicija 1.6. *Reći ćemo da matrica A ima rang jednak r, ako:*
1. postoji minor reda r različit od nule;
2. svaki minor reda $s > r$ matrice A je jednak nuli.

Drugim riječima, rang matrice je dimenzija najveće kvadratne podmatrice čija je detemninata različita od nule.
Oznaka: $r = rankA$.

1.6.1 Bazisne vrste i kolone

Matrica A ranga r ima bar jednu kvadratnu podmatricu M_r dimenzija $r \times r$, takvu da je $detM_r \neq 0$. Vrste i kolone matrice A na čijim se presjecima nalaze elementi matrice M_r nazivaju se bazisnim vrstama i bazisnim kolonama.
Primjer. Posmatrajmo matricu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -17 & -3 \end{pmatrix}.$$

Najveća kvadratna podmatrica matrice A je dimenzije 3×3. Međutim, direktnim računanjem determinanti možemo vidjeti da su sva četiri minora reda 3 jednaka nuli. Izdvajajući iz A podmatrice dimenzije 2×2, dobijamo minore drugog reda koji nisu jednaki nuli. Kao bazisne vrste i kolone možemo uzeti, recimo, prvu i drugu vrstu i prvu i drugu kolonu. Tada:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, detM_2 = -3 \neq 0.$$

Sada iz definicije slijedi da je rang matrice A jednak 2. Primijetimo da izbor bazisnih vrsta i kolona nije jednoznačan. Na primjer, možemo izabrati drugu i treću vrstu i prvu i četvrtu kolonu i one će takođe biti bazisne. Zaista, na ovaj način smo izabrali podmatricu

$$M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

čija je determinanta jednaka -1.

Teorema 1.4. *Važe sljedeća tvrđenja:*
1. Bazisne vrste (bazisne kolone) matrice A su linearno nezavisne.
2. Svaka vrsta (kolona) matrice A se može predstaviti kao linearna kombinacija bazisnih vrsta (kolona).

Dokaz
1. Neka je $rankA = r$, i $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ bazisne vrste matrice A. Tada je podmatrica M_r koja sadrži ove vrste takva da $detM_r \neq 0$. Saglasno Posljedici 1.3 (takođe vidi Zaključak nakon ove Posljedice) vrste matrice M_r su linearno nezavisne. No, tada su i vrste $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ matrice A linearno nezavisne.
2. Pretpostavimo da je $rankA = r$. Tada su svi minori reda $r+1$ jednaki nuli, tj. $detM_{r+1} = 0$, gdje je:

$$M_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{p1} & \dots & a_{pr} & a_{ps} \end{pmatrix}, \quad p > r, \quad s > r.$$

Označimo sa $\Delta_{1s}, \Delta_{2s}, \dots, \Delta_{rs}, \Delta_{ps}$ algebarske dopune elemenata $a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{rs}, a_{ps}$ i izračunajmo determinantu M_{r+1}, razlažući po koloni s:

$$detM_{r+1} = a_{1s}\Delta_{1s} + a_{2s}\Delta_{2s} + \dots + a_{rs}\Delta_{rs} + a_{ps}\Delta_{ps} = 0. \tag{1.4}$$

Podijelimo jednačinu (1.4) sa $detM_r \neq 0$:

$$a_{ps} = -\frac{\Delta_{1s}}{detM_r}a_{1s} - \frac{\Delta_{2s}}{detM_r}a_{2s} - \dots - \frac{\Delta_{rs}}{detM_r}a_{rs}.$$

Ako uvedemo oznake $-\frac{\Delta_{ks}}{detM_r} = \alpha_k, k \in \{1, 2, ..., r\}$ dobijamo:

$$a_{ps} = \alpha_1 a_{1s} + \alpha_2 a_{2s} + \dots + \alpha_r a_{rs}.$$

Uvrštavajući u prethodnu jednakost redom $s = 1, 2, \dots, n$ dobijamo:

$$\begin{cases} a_{p1} = \alpha_1 a_{11} + \dots + \alpha_r a_{r1} \\ \vdots \\ a_{pn} = \alpha_1 a_{1n} + \dots + \alpha_r a_{rn}. \end{cases}$$

Posljednjih n jednakosti možemo zapisati kao vektorsku jednakost:

$$a_p = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r.$$

Znači, vrsta a_p je linearna kombinacija bazisnih vrsta $a_1, \dots, a_r$.

Teorema 1.5. *Ako se svaka vrsta $a_1, a_2, \dots, a_p$ može predstaviti kao linearna kombinacija vrsta $b_1, b_2, \dots, b_k$ i $p > k$, tada su vrste $a_1, a_2, \dots, a_p$ linearno zavisne.*

Dokaz
Po pretpostavci postoje koeficijenti c_{ij}, takvi da

$$\begin{cases} a_1 = c_{11}b_1 + \dots + c_{1k}b_k \\ \vdots \\ a_p = c_{p1}b_1 + \dots + c_{pk}b_k \end{cases} \tag{1.5}$$

Formirajmo matrice:

$$B = (b_1\, b_2\, \ldots\, b_p) \text{ i } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \ldots & c_{pk} \end{pmatrix}.$$

Označimo sa $c_1, \ldots, c_p$ vrste matrice C, tada se jednakosti (1.5) mogu zapisati u obliku:

$$\begin{cases} a_1 = Bc_1 \\ \vdots \\ a_i = Bc_i \\ \vdots \\ a_p = Bc_p \end{cases}$$

Jasno je da je $rankC \leq k < p$. Pošto C ima p vrsta, to jedna može biti predstavljena kao linearna kombinacija ostalih. Recimo:

$$c_i = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_{i-1} c_{i-1} + \alpha_{i+1} c_{i+1} + \cdots + \alpha_p c_p.$$

Tada:

$$a_i = Bc_i = B(\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_{i-1} c_{i-1} + \alpha_{i+1} c_{i+1} + \cdots + \alpha_p c_p) =$$
$$= \alpha_1 (Bc_1) + \alpha_2 (Bc_2) + \cdots + \alpha_{i-1} (Bc_{i-1}) + \alpha_{i+1} (Bc_{i+1}) + \cdots + \alpha_p (Bc_p) =$$
$$= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \cdots + \alpha_p a_p,$$

odakle slijedi da su $a_1, a_2, \ldots, a_p$ linearno zavisne.

Teorema 1.6. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$. Rang A je maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta (kolona) matrice A.*

Dokaz
Neka je $rankA = r$ i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ bazisne vrste matrice A. Neka je $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ proizvoljan skup s vrsta matrice A, gdje je $s > r$. Po Teoremi 1.4, svaka vrsta $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ se može predstaviti kao linearna kombinacija vrsta $a_1, \ldots, a_r$. Pošto je $s > r$, to su po Teoremi 1.5 $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$ linearno zavisne.

Teorema 1.7. *Ako se svaka vrsta (kolona) matrice A može izraziti kao linearna kombinacija vrsta (kolona) matrice B, tada $rankA \leq rankB$.*

Dokaz
Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ bazisne vrste u matrici A, a $b_1, b_2, \ldots, b_s$ bazisne vrste u B. Treba pokazati da je $r \leq s$.
Pretpostavimo suprotno, da je $r > s$. Po uslovu svaka vrsta $a_1, \ldots, a_r$ može se predstaviti kao linearna kombinacija $b_1, \ldots, b_s$, pa su po Teoremi 1.5 vrste $a_1, \ldots, a_r$ linearno zavisne. Ali, to su po pretpostavci bazisne vrste, pa imamo kontradikciju, koja dokazuje da je $r \leq s$, tj. $rankA \leq rankB$.

Teorema 1.8. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{P}^{n\times k}$. Tada $rank(A\cdot B) \leq rankA$ i $rank(A\cdot B) \leq rankB$.*

Dokaz
1. Vrste matrice $A \cdot B$ su linearna kombinacija vrsta matrice B (što direktno slijedi iz definicije množenja matrica).
2. Vrste matrice $A \cdot B$ su linearna kombinacija vrsta matrice A (što direktno slijedi iz definicije množenja matrica).
Na osnovu Teoreme 1.7, imamo da je $rank(A \cdot B) \leq rankB$ i $rank(A \cdot B) \leq rankA$. Slično važi i za kolone.

Teorema 1.9. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$.*
Ako je $B \in P^{m\times m}$ invertibilna matrica, tada $rank(B \cdot A) = rankA$.
Ako je $C \in P^{n\times n}$ - invertibilna matrica, tada $rank(A \cdot C) = rankA$.

Dokaz
Na osnovu prethodne Teoreme je $rank(B \cdot A) \leq rankA$.
Pošto je B invertibilna, to matricu A možemo predstaviti u obliku $A = I \cdot A = (B^{-1} \cdot B) \cdot A = B^{-1} \cdot (B \cdot A)$.
Dakle: $rankA = rank(B^{-1} \cdot (B \cdot A)) \leq rank(B \cdot A)$.
Posljednja nejednakost slijedi iz prethodne Teoreme. Dvije dobijene nejednakosti dokazuju našu Teoremu.

Posljedica 1.4. *Elementarne transformacije vrsta i kolona ne mijenjaju rang matrice.*

Dokaz slijedi iz činjenice da su matrice elementarnih transformacija invertibilne (Teorema 1.3).
Zadatak. Odredimo rang matrice A zadate sa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -17 & -3 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da treću vrstu možemo izraziti kao linearnu kombinaciju prve i druge. Naime, ako prvu vrstu oduzmemo od druge i dodamo trećoj, imamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 12 & 1 \\ 0 & 6 & -24 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dodavanjem druge vrste, pomnožene brojem 2, trećoj, dobijamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Vidimo da je rang posljednje matrice jednak 2, a pošto elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice, to znači i da je rang matrice A jednak 2.

1.7 Singularne i regularne matrice

U ovoj Sekciji ćemo se vratiti kvadratnim matricama.

Definicija 1.7. *Kvadratna matrica A naziva se regularnom, ako je $detA \neq 0$. Ako je $detA = 0$, matrica A se naziva singularnom.*

Tvrđenje 1.5. *Matrica $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ je regularna ako i samo ako je $rankA = n$.*

Dokaz
Ukoliko je $rankA < n$, to su njene vrste linearno zavisne, dakle jedna vrsta je linearna kombinacija ostalih. Iz Posljedice 1.3 slijedi da je $detA = 0$, tj. A je singularna.
S druge strane, ako je $rankA = n$, to, po definiciji ranga, postoji minor reda n koji je različit od nule. Pošto je dimenzija matrice $n \times n$, ovo znači da je $detA \neq 0$.

Teorema 1.10. *Svaka regularna matrica se može predstaviti kao proizvod matrica elementarnih transformacija.*

Dokaz
Neka je A regularna. Iz prethodnog Tvrđenja imamo da je $rankA = n$. Prema Tvrđenju 1.1, matrica A se elementarnim transformacijama vrsta i kolona može svesti na jediničnu matricu (ovdje smo osim pomenutog Tvrđenja iskoristili činjenicu da elementarne transformacije vrsta i kolona ne mijenjaju rang matrice). Podsjetimo da elementarne transformacije vrsta odgovaraju množenju matricama elementarnih transformacija $E_1, \ldots, E_s$ sa lijeve strane. Takođe, elementarne transformacije kolona se mogu zapisati kao množenje matricama elementarnih transformacija $G_1, \ldots, G_q$ sa desne strane. Zapišimo sve rečeno u obliku jednakosti:

$$I = E_s \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot G_1 \cdot G_2 \cdots G_q, \tag{1.6}$$

Međutim, matrice $E_1, \ldots, E_s, G_1, \ldots, G_q$ su, kao matrice elementarnih transformacija, invertibilne. Sada jednakost (1.6) množimo redom sa $E_s^{-1}, ..., E_1^{-1}$ sa lijeve strane. Imamo:

$$E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} = A \cdot G_1 \cdots G_q. \tag{1.7}$$

Dalje množimo (1.7) sa $G_q^{-1}, \ldots, G_1^{-1}$ sa desne strane:

$$E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} \cdot G_q^{-1} \cdots G_1^{-1} = A.$$

Po Teoremi 1.3, matrice $E_s^{-1}, \ldots, E_1^{-1}, G_1^{-1}, \ldots, G_q^{-1}$ su matrice elemetarnih transformacija, što čini dokaz kompletnim.
Sada smo u mogućnosti da dokažemo da je determinanta proizvoda matrica jednaka proizvodu determinanti.

Teorema 1.11. *Neka su $A, B \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Tada je*

$$det(A \cdot B) = detA \cdot detB.$$

Dokaz
Dokaz ćemo podijeliti u tri dijela. Najprije ćemo dokazati Teoremu za slučaj kada je A matrica elementarnih transformacija. Zatim ćemo razmotriti slučaj kada je matrica A singularna i konačno, koristeći prethodnu Teoremu, razmotrićemo slučaj kada je A regularna.
(I) Počnimo od slučaja kada je A matrica elementarnih transformacija.
(Ia) Neka je A matrica elementarnih transformacija prvog tipa. Tada je $A{\cdot}B$ matrica dobijena iz B množenjem jedne vrste brojem $\lambda \neq 0$. Imajući to u vidu, lako je vidjeti da $det(A{\cdot}B) = \lambda{\cdot}detB$ (Tvrđenje 1.3). Prisjetimo se da je determinanta matrice elementarnih transformacija prvog tipa jednaka λ, pa imamo $det(A \cdot B) = \lambda \cdot detB = detA \cdot detB$.
(Ib) Neka je A matrica elementarnih transformacija drugog tipa. Tada je $detA = -1$, a matrica $A \cdot B$ je dobijena zamjenom mjestima dvije vrste u B. Pozovimo se na Posljedicu 1.1 da zaključimo:

$$det(A \cdot B) = -detB = -1 \cdot detB = detA \cdot detB.$$

(Ic) Neka je A matrica elementarnih transformacija trećeg tipa. Tada je $detA = 1$, a matrica $A \cdot B$ dobijena iz B dodavanjem $i-$te vrste, pomnožene brojem α, $j-$ toj vrsti. Poznato je da se determinanta matrice ne mijenja od takve operacije (Posljedica 1.2), prema tome:

$$det(A \cdot B) = detB = 1 \cdot detB = detA \cdot detB.$$

(II) Razmotrimo slučaj kada je A singularna, tada je (Tvrđenje 1.5) $rankA < n$:

$$rank(A \cdot B) \leq rankA < n,$$

odakle zaključujemo da je matrica $A \cdot B$ singularna, tj. $det(A \cdot B) = 0 = 0 \cdot detB = detA \cdot detB$. Dakle, Teorema važi i za slučaj kada je A singularna matrica.
(III) Konačno, ako je matrica A regularna, ona se može predstaviti kao prozivod matrica elementarnih transformacija, tj. $A = E_1 \cdots E_s$. Tada na matrice $E_1, \ldots, E_s$ možemo primijeniti punkt (I) ovog dokaza:

$$det(A \cdot B) = det(E_1 \cdots E_s \cdot B) = detE_1 \cdot det(E_2 \cdots E_s B) = detE_1 \cdot detE_2 \cdot det(E_3 \cdots E_s \cdot B) =$$

$$= ... = detE_1 \cdot detE_2 \cdots detE_s \cdot detB = det(E_1 \cdot E_2 \cdots E_s) \cdot detB = detA \cdot detB.$$

Teorema 1.12. *Matrica A je invertibilna ako i samo ako je regularna i $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$.*

Dokaz
Neka je A singularna, tj. $detA = 0$. Pretpostavimo da postoji matrica A^{-1}. Tada $A^{-1} \cdot A = I$, pa po Teoremi 1.11, imamo $det(A^{-1} \cdot A) = detA^{-1} \cdot detA = 1$. No, kako je $detA = 0$, to je posljednja jednakost nemoguća, što dokazuje da matrica A^{-1} ne postoji.
Neka je A regularna. Ponovo se pozovimo na Teoremu 1.10: $A = E_1 \cdots E_s$, gdje su $E_1, \ldots, E_s$ matrice elementarnih transformacija. Označimo $A^{-1} = E_s^{-1} \cdots E_1^{-1}$. Lako je provjeriti da $A^{-1} \cdot A = I$, dakle A je invertibilna. Dalje, imamo da je $det(A^{-1} \cdot A) = detA^{-1} \cdot detA = detI = 1$ ($detA \neq 0$). Odavde je $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$.
Konačno, kombinujući Tvrđenje 1.5 i Teoremu 1.12 izvodimo sljedeći zaključak o vezi između ranga matrice, njene determinante i invertibilnosti.:
Zaključak. Neka je $A \in P^{n \times n}$. Tada:

1. A je regularna $\Longleftrightarrow$ A je invertibilna $\Longleftrightarrow$ A je punog ranga, tj. $rankA = n$.
2. A je singularna $\Longleftrightarrow$ A nema obratnu matricu $\Longleftrightarrow$ $rankA < n$.

Sada se možemo vratiti metodima provjere da li je sistem vektora u $\mathbb{R}^n$ linearno nezavisan, da li je baza i slično. Kako smo se uvjerili u Glavi 1, zadaci ove vrste se svode na rješavanje sistema linearnih jednačina. Koristeći pojam ranga matrice i metod Gausa, ove zadatke sada možemo efikasnije rješavati.

Zadatak 1. U $\mathbb{R}^n$ je zadat sistem od $m < n$ vektora $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Potrebno je provjeriti da li su vektori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ linearno nezavisni.

Od vektora $a_1, \ldots, a_m$ formirajmo matricu $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Ako je $rankA = m$ tada su vektori linearno nezavisni.
Ako je $rankA < m$ tada su vektori linearno zavisni.

Na primjer, ispitajmo linearnu zavisnost sistema $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \\ 49 \end{pmatrix}$.

Formirajmo matricu čije su vrste koordinate zadatih vektora i na nju primijenimo algoritam Gausa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 8 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 7 & -1 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 1 & -63 \\ 0 & 7 & -1 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 1 & -63 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang ove matrice je 3, što znači da je ovaj sistem vektora linearno nezavisan.

Zadatak 2. U $\mathbb{R}^n$ zadato n vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Provjeriti da li ovi vektori čine bazu.

Formirajmo matricu $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. A je kvadratna matrica dimenzije $n \times n$.

Provjeru možemo izvršiti na dva načina: računanjem determinante ili ranga matrice A.
Ako je $detA = 0$, tada je $rankA < n$, dakle navedeni vektori su linearno zavisni, pa ne mogu činiti bazu. Ako je $detA \neq 0$ tada vektori $a_1, a_2, \cdots, a_n$ čine bazu prostora $\mathbb{R}^n$.
Primijetimo da je u većini slučajeva brži način za provjeru korištenje metoda Gausa, budući da računanje determinante u opštem slučaju zahtijeva više operacija.

Zadatak 3. U $\mathbb{R}^n$ je zadato m vektora $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pri čemu je $m > n$. Provjera linearne zavisnosti ovih vektora se vrši nalaženjem ranga matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Najveći mogući rang ove matrice je n, a kako je $m > n$, to su ovi vektori sigurno linearno zavisni. Ovo je u skladu sa činjenicom koja nam je već poznata da je sistem od $m > n$ vektora u n-dimenzionalnom prostoru uvijek linearno zavisan, pa ne mogu biti baza.

1.7.1 Determinanta transponovane matrice

Definicija 1.8. *Neka je* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. *Tada se matrica* $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *naziva transponovanom matricom k matrici A.*

Tvrđenje 1.6. *Ukoliko se matrice A i B mogu pomnožiti, to važi:* $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Teorema 1.13. *Neka je A matrica dimenzija* $n \times n$. *Tada je* $detA = detA^T$.

Dokaz
Ako je A singularna, tada je $rankA < n$, pa je $rankA^T < n$, pa zaključujemo $detA = 0 = detA^T$. Ako je A regularna matrica tada je možemo predstaviti kao $A = E_1 \cdots E_s$. Tada je $A^T = (E_1 \cdots E_s)^T = E_s^T \cdots E_1^T$. Po Teoremi 1.11 je:

$$detA = detE_1 \cdots detE_s, \quad detA^T = detE_s^T \cdots detE_1^T.$$

Za matrice elementarnih transformacija je lako provjeriti da važi $detE_1 = detE_1^T, \dots, detE_s = detE_s^T$, pa zaključujemo da je $detA = detA^T$.

1.7.2 Metod nalaženja obratne matrice

Sada ćemo na konkretnom primjeru objasniti jedan od algoritama nalaženja obratne matrice. Primijetimo da navedeni algoritam nije jedini, postoji još nekoliko načina da se nađe obratna matrica.
Neka je zadata sljedeća matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -9 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pored matrice A dopišimo jediničnu matricu i nad vrstama nove matrice vršimo elementarne transformacije, sve dok na mjestu gdje se nalazila matrica A ne dobijemo jediničnu matricu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to IIIv + Iv \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$IIIv{+}IIv; \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to IIv{+}IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to Iv{+}IIv{\cdot}\frac{7}{9} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to IIv \cdot (-\frac{1}{9}) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Matrica koja je dobijena na desnoj strani je obratna k matrici A, dakle:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je ovaj algoritam moguće dovesti do kraja, osim u slučaju kada je $rankA < n$. tj. kada je matrica A singularna. U tom slučaju nećemo dobiti jediničnu matricu na lijevoj strani (umjesto toga, pojaviće se vrsta u kojoj su svi elementi nule), pa nam algoritam neće dati rezultat. Naravno, to nam ukazuje da matrica A nema obratnu.

1.7.3 Drugi metod nalaženja obratne matrice

Teorema 1.14. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ regularna matrica. Tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{n1} & \dots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

gdje je $\tilde{A}_{ij}$ algebarska dopuna elementa a_{ij}.

Dokaz:

Neka je $B = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{n1} & \dots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix}^T$, i $AB = C$.

Tada je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \frac{1}{detA} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{det} A_{jk} = \frac{1}{detA} det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} detX.$$

Za $i \neq j$, X je matrica koja ima dvije iste vrste (i-tu i j-tu), pa je $detX = 0$, i $c_{ij} = 0$. Za $i = j$ je $X = A$, pa je $c_{ii} = \frac{1}{detA} detA = 1$. Dakle, matrica C je jedinična matrica, i $AB = I$.

Analogno dobijamo da je $BA = I$, pa zaključujemo da je $B = A^{-1}$, odnosno $A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{n1} & \dots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix}^T$.

1.8 Zamjena baza. Formule prelaska.

Neka je V vektorski prostor, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $S' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ baze u V. Razložimo vektore iz baze v' po bazi S:

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i, \ \forall j \in \overline{1,n},$$

ili

$$v'_j = \alpha_{1j} v_1 + \cdots + \alpha_{nj} v_n, \ \forall j \in \overline{1,n}.$$

Formirajmo matrice $S' = (v'_1 \cdots v'_n)$ i $S = (v_1 \cdots v_n)$ i zapišimo prethodne jednakosti u matričnom obliku:

$$(v'_1\, v'_2 \cdots v'_n) = (v_1\, v_2 \cdots v_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Definicija 1.9. *Matrica* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ *se naziva matricom prelaska iz baze* S *u* S'.

Teorema 1.15. *Neka je* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *baza u* V*,* A *regularna matrica dimenzija* $n \times n$*. Tada kolone matrice* $S' = SA$ *čine bazu u* V*.*

Dokaz
Pošto su $rank\, S = n$, $rank A = n$, to je po Teoremi 1.9 $rank\, S' = n$. To znači da su vektori $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ linearno nezavisni, pa oni čine bazu u V.
Primjer. Razmotrimo dvije baze S i S' u $\mathbb{R}^2$:

$$S = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\};$$

$$S' = \{{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, {v_2}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

Razložimo vektore iz baze S' po bazi S:

$$v'_1 = 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2; v'_2 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2.$$

Dakle, matrica prelaska iz baze S u S' je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Razmotrimo sada vektor x sa koordinatama $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ u bazi $\{v_1, v_2\}$. Nađimo koordinate ovog vektora u bazi $\{v_1', v_2'\}$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{7}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}.$$

Dakle, koordinate vektora x u bazi $\{v_1', v_2'\}$ su $\begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

Koristeći matricu prelaska, imamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kao što smo vidjeli na prethodnom primjeru, koordinate vektora u jednoj bazi se mogu dobiti iz koordinata u drugoj uz pomoć matrice prelaska.

Tvrđenje 1.7. *Označimo sa $x(S)$ i $x(S')$ koordinate vektora x u bazama S i S'. Neka je A matrica prelaska iz baze S u bazu S'. Tada $x(S) = Ax(S')$.*

Teorema 1.16. *Neka je A matrica prelaska iz baze S u S', $S' = SA$. Tada $S = S'A^{-1}$.*

Dokaz
Pošto je A matrica prelaska, to je ona regularna, dakle i invertibilna. Množeći jednakost $S' = SA$ sa A^{-1} sa lijeve strane, dobijamo naše tvrđenje.

Definicija 1.10. *Govorićemo da su baze S i S', gdje je $S' = SA$, jednako orjentisane, ako $detA > 0$. Ako je $detA < 0$, tada kažemo da su baze suprotno orjentisane.*

1.9 Ekvivalentne matrice

Definicija 1.11. *Matrice A i B dimenzija $m \times n$ se nazivaju ekvivalentnima, ako postoje regularne matrice P dimenzije $m \times m$ i Q dimenzije $n \times n$ takve da:*

$$A = PBQ.$$

Teorema 1.17. *Neka je data matrica A dimenzija $m \times n$ i $rankA = r$. Tada postoje regularne matrice P, dimenzije $m \times m$ i Q, dimeznije $n \times n$ takve da:*

$$G = PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix},$$

gdje je I_r jedinična matrica dimeznija $r \times r$, $0_1, 0_2, 0_3$ nula matrice odgovarajućih dimenzija, $r \times (n-r), (m-r) \times r, (m-r) \times (n-r)$, respektivno.

Dokaz
Pozovimo se na Tvrđenje 1.1 da elementarnim transformacijama vrsta i kolona matricu A svedemo na oblik G. Dakle: $G = E_s \cdots E_1 \cdot A \cdot G_1 \cdots G_q$, gdje su $E_1, \ldots E_s, G_1, \ldots, G_q$ matrice elementarnih transformacija. Budući da elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice, to će matrica G imati tačno $r = rankA$ jedinica na glavnoj dijagonali.
Sada označimo $P = E_s \cdots E_1$, a $Q = G_1 \cdots G_q$. Očigledno, P i Q su, kao proizvodi matrica elementarnih transformacija, regularne. Ovim je Teorema dokazana.

Teorema 1.18. *Matrice A i B dimeznija $m \times n$ su ekvivalentne ako i samo ako $rankA = rankB$.*

Dokaz
Neka su A i B ekvivalentne. Tada po definiciji postoje regularne matrice P i Q, takve da $A = PBQ$. Pošto množenje regularnim matricama ne mijenja rang (Teorema 1.9), to važi da je $rankA = rankB = r$.
Neka je sada $rankA = rankB = r$. Po prethodnoj Teoremi imamo:

$$G = P_1 A Q_1, G = P_2 B Q_2,$$

gdje su P_1, P_2, Q_1, Q_2 regularne matrice. Izjednačavajući, dobijamo:

$$P_1 A Q_1 = P_2 B Q_2 \Longrightarrow A = P_1^{-1} P_2 B Q_2 Q_1^{-1}.$$

Matrice $P = P_1^{-1} P_2$ i $Q = Q_2 Q_1^{-1}$ su regularne. Sada iz definicije slijedi da su A i B ekvivalentne.